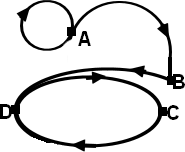
***CHAPITRE : Théorie des graphes orientés***

On appelle graphe orienté la donnée d’un ensemble X de sommets, X= {S1, S2, …, Sn} et d’un ensemble E d’Arco représentés par des couples de commets de la forme (Si, Sj)

Dans le couple (Pi, PJ), Pi est l’origine de l’arc et Sj est l’extrémité de l’arc.

**Exemple et représentation :**



On peut utiliser par exemple cet outil pour modéliser un site web. A,B,C,D représenteraient des pages web et les arc indiqueraient quelles pages doivent être accessibles à partir des autres pages.

X = {A, B, C, D}  
E = {(A, A), (A, B), (C, D), (D, C), (B, D)}

**Notations et définitions :**

* (Si,sj) se note encore Si -> Sj

Sj est dit un processeur de Si  
Si est dit un prédécesseur de Sj

* (Si,Si) s’appelle une boucle

S1->S2->->S4->S8 s’appelle un chemin

S1 s’appelle l’origine du chemin et S8 l’extrémité du chemin

Un chemin qui a même origine et extrémité s’appelle un circuit :  
 P1->P2-P17-P1 est un circuit

Un circuit qui n’a que des sommets 2 à 2 différents sauf l’origine et l’extrémité qui sont identique s’appelle un cycle :

A B

A->B->C->D->E->C->A : est un circuit mais pas un cycle  
  
A->B->C->A : est un cycle

C

D E

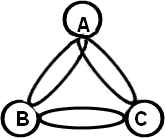
**Notations et définitions :**

* On appelle longueur d’un chemin le nombre d’arc de ce chemin. On parle aussi du nombre de pas de ce chemin

A->B->C est un chemin de longueur 2, ou de 2 pas

* A On dit que les arcs A->B et C->B sont incidents en B  
   B   
  C
* On dit que les arcs A->B et B->C sont adjacents en B  
  A B C
* A

B On dit que les arcs B->A et B->C sont émergeant en B  
 C



Matrices d’adjacence :

Soit G un graphe sa matrice d’adjacence que l’on notera M est une matrice carrée NxN où N est le nombre de sommet du graphe (encore appelé ordre du graphe. M est une matrice Booléenne (qui ne comporte que des 1 et des 0) constituée de la façon suivante :

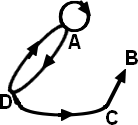
A B C D

A 1 0 0 1

B 0 0 0 0 0 : pas d’arc

C 0 1 0 0 1 : existence d’arc

D 1 0 1 0



Matrice d’un graphe complet :

1 1 … 1

Et donc le nombre d’arc est la somme de tous les 1 de la matrice  
  
nombre d’arc) N²

1 1 1

. . .  
. . .  
. . .  
1 1 1

Dans notre exemple : Le nombre d’arc d’origine A est la somme des 1 de la première ligne…  
Le nombre d’arc total est la somme des 1 de notre matrice.  
Le nombre d’arc d’extrémité B est la somme des 1 de la deuxième colonne…  
Le nombre de boucle est la somme des 1 de la diagonal principale.

Itérons la matrice d’adjacence :

Calculons A², A^3 A B C D A B C D

A 1 0 0 1 1 0 0 1

B 0 0 0 0 0 0 0 0

C 0 1 0 0 0 1 0 0

D 1 0 1 0 1 0 1 0

A B C D

A 1 0 0 1 2 0 1 1 3 1 1 2

B 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

C 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

D 1 0 1 0 1 1 0 1 2 0 1 1

A^2 A^3

1. matrices adjacent

A

B

E

C

D

Fermenter transitive d’un graphe

Préambule opération booléennes:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a\b | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

a variable booléenne qui ne prend que les valeurs 0 ou 1 idem pour b.

Pour les multiplications (et additions) boo de matrices :

1.1+0.0+1.1=1+0+1  
 = 1+1  
 = 1

Notation A\*B

Et a\*a\*…\*a noté a^\*

1 1 1 0  
0 1 + 0 1

Remarque : si A est la matrice d’adjacence d’un graphe considéré comme une matrice Booléenne.

Fermeture transitive d’un graphe

Définition

On appelle fermeture transitive d’un graphe G, G=(x,e), le graphe G^ obtenue en rajoutant l’arc xi 🡪 xj s’il existe un chemin d’origine xi et d’extrémité xj (si cet arc n’existe pas déjà)

Théorème : la matrice d’adjacence

Si n est l’ordre du graphe (son nombre de sommets)

M matrice d’adjacence = m^= m + m^2 + .... + m^\*

Chemin hamiltonien et eulériens

On appelle chemin hamiltonien tout chemin pour le graphe qui passe une fois et une seule fois par tous les sommets du graphe.  
On appelle chemin eulérien tout chemin pour le graphe qui passe une fois et une seule fois par tous les arcs du graphe.

Attention, un chemin hamiltonien ne peut être un circuit ou un cycle (Car l’origine ne peut être égale a l’extrémité)

Remarque : Soit n l’ordre du graphe. Un chemin hamiltonien a n-1 arcs et donc sa longueur est n-1